SESSION 1988 Epreuve n° 2 (Problème)

Mathématiques (Options T et TA)

Durée : 3 heures

Les parties II, III et IV utilisent des résultats de la partie I.

Les parties III et IV sont indépendantes de la partie II.

La partie IV utilise les résultats de la partie III.

On désigne par E_0 l'espace vectoriel des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ et par E_2 l'espace vectoriel des applications de classe C^2 de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

L'application K de [0,1]x[0,1] dans $\mathbb{R}$ est définie par

$$(1)\quad K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{pour } x \leq t \\ t(1-x) & \text{pour } x \geq t \end{cases}.$$

Enfin, pour toute fonction $f \in E_0$, on désigne par Lf l'application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$(2)\quad Lf(x) = \int_0^1 K(x,t)\, f(t)\, dt .$$

I

1°) Pour tout $x \in]0,1[$ représenter graphiquement la fonction: $t \mapsto K(x,t)$. Cette fonction est-elle continue? Que devient cette fonction pour $x = 0$ et pour $x = 1$?

2°) Calculer l'intégrale: $g(x) = \int_0^1 K(x,t)\, dt$.

Représenter graphiquement la fonction $g: x \mapsto g(x)$.

Préciser sa borne inférieure et sa borne supérieure sur [0,1].

3°) Soit L l'application: $f \mapsto Lf$.

Montrer que L est une application linéaire de E_0 dans E_2 .

Pour établir que Lf est de classe C^2 on décomposera, pour x fixé, l'intégrale de (2) en une somme de deux intégrales.

Préciser la dérivée $(Lf)''$ et les valeurs de $Lf(0)$ et $Lf(1)$.

II

1°) Déterminer le noyau de L . L est-elle injective? L est-elle surjective?

2°) Soient f un vecteur propre de L et λ la valeur propre qui lui est associée.

Montrer que f est solution d'une équation différentiellle du second ordre que l'on précisera. Que peut-on dire de $f(0)$ et de $f(1)$?

3°) Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus. En déduire les valeurs propres de L ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres.

III

Soit F une application de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

H_1) F est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.

H_2) il existe une constante A, $0 < A < 8$, telle que

$|F(x,u) - F(x,v)| \leq A\,|u-v|$ pour $x \in [0,1]$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

On définit les suites de fonctions (u_n) et (v_n) par les relations:

$$(3)\quad u_0(x) = 0 \text{ et } u_n(x) = \int_0^1 K(x,t)F(t,u_{n-1}(t))dt \text{ pour } n \geq 1;$$

$$(4)\quad v_n(x) = F(x,u_n(x)) \text{ pour tout } n .$$

1°) On pose, pour $n \geq 1$, $w_n = u_n - u_{n-1}$, et on désigne par M_n la borne supérieure de $|w_n|$ sur [0,1] .

Montrer que $M_{n+1} \leq \frac{A}{8} M_n$. En déduire une majoration de M_n .

2°) Montrer que la suite (u_n) est uniformément convergente sur [0,1].

(On ne cherchera pas à préciser la limite).

3°) On pose: $u(x) = \lim u_n(x)$ et $v(x) = F(x,u(x))$.

Montrer que la suite (v_n) converge uniformément sur [0,1] vers v.

En déduire que $u = Lv$.

Tournez la page S.V.P.

On considère le problème différentiel:

$$(5) \quad \begin{cases} z''(x) + F(x,z(x)) = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

où F est une application de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions H_1) et H_2) et z un élément inconnu de E_2 .

1°) Montrer, en utilisant les résultats de II et de I, que le problème (5) a au moins une solution.

2°) Soit z une solution de (5). Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a:

$$z(x) = \int_0^1 K(x,t)F(t,z(t))dt \ .$$

(On pourra comparer les dérivées secondes des deux membres ainsi que les valeurs de ces deux membres en 0 et 1.)

3°) Soient z_1 et z_2 deux solutions de (5).

Montrer que si on désigne par M la borne supérieure de $|z_1 - z_2|$ sur $[0,1]$, on a :

$$0 \leq M \leq \frac{\lambda}{8} M \ .$$

Que peut-on en conclure pour le problème (5) ?

4°) On suppose $F(x,y) = x^2 \sin y$. Résoudre dans ce cas le problème (5).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail